УДК 51

Горбунова А.Е.
студент
Иркутский национальный исследовательский технический университет
Россия, Иркутск

МЕТОДЫ ОТБОРА КОРНЕЙ ИЗ ЗАДАННОГО МНОЖЕСТВА В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Аннотация: статья посвящена отбору корней, принадлежащих числовому отрезку, в тригонометрических уравнениях. Рассмотрены три метода: геометрический, алгебраический, функциональный. В тексте статьи разобраны задачи, которые встречаются в едином государственном экзамене по профильной математике.

Ключевые слова: профильная математика, единый государственный экзамен, уравнения, тригонометрические уравнения, отбор корней.

Gorbunova A.E.
student
Irkutsk National Research Technical University
Russia, Irkutsk

METHODS FOR SELECTING ROOTS FROM A GIVEN SET IN TRIGONOMETRIC EQUATIONS

Abstract: the article is devoted to the selection of roots belonging to a numerical segment in trigonometric equations. Three methods are considered: geometric, algebraic, functional. The text of the article contains the problems encountered in the unified state exam in profile mathematics.

Key words: profile mathematics, unified state exam, equations, trigonometric equations, root selection.

Тригонометрическое уравнение – это уравнение, содержащее тригонометрические функции неизвестного аргумента [1]. Множество всех корней данного уравнения обычно бесконечно. Но, если задан отрезок, интервал или полуинтервал, всегда можно отобрать конкретные корни тригонометрического уравнения. Рассмотрим три метода отбора корней из заданного множества: геометрический, алгебраический, функциональный.

Геометрический метод – это такой метод отбора корней, когда чертят единичную окружность, отмечают заданный промежуток и находят на нем корни данного уравнения. Рассмотрим геометрический метод при решении тригонометрического уравнения в едином государственном экзамене по профильной математике в примере 1.

Пример 1:

а). Решите уравнение $cos2x = \sin(\ x + \frac{\pi}{2}\ )$

б). Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку: [-2π; - π] [2].

Решение:

а). Преобразуем правую часть уравнения с помощью формулы приведения: $sin(\ x + \frac{\pi}{2}\ ) = cosx$, тогда $cos2x = cosx$

Для преобразования левой части необходимо применить формулу двойного угла: $cos2x = (cos\,x)^2 - (sin\,x)^2 = 2(cos\,x)^2 - 1$. Получаем: $2(cos\,x)^2 - 1 = cosx$.

Перенесем все в левую часть уравнения: $2(cos\,x)^2 - cosx - 1 = 0$.

Обозначим $cosx = t$, где $-1 \le t \le 1$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$.

Решаем данное квадратное уравнение: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$.

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 + 3}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$$

Обратная замена: $cosx = 1, cosx = -\frac{1}{2}$

$cosx = 1$

$x_1 = 2\pi n,$ *где n – целое число*

$$cosx = -\frac{1}{2}$$

$x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$ *где k – целое число*

б). Корни, принадлежащие отрезку [-2π; - π], найдем геометрическим методом с помощью единичной окружности (рис.1).

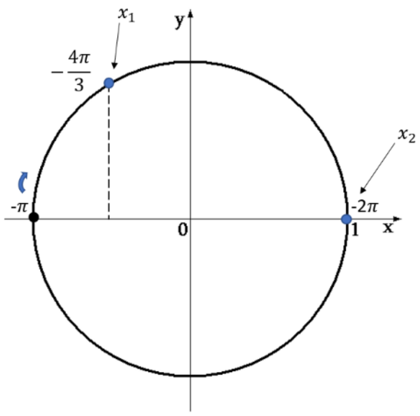

рис.1

$$x_1 = -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x_2 = -2\pi$$

Ответ: а). $x_1 = 2\pi n,$ *где n – целое число,* $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$ *где k – целое число.* б). $x_1 = -\frac{4\pi}{3},\ x_2 = -2\pi.$

Часто множество корней тригонометрического уравнения задается некоторым алгебраическим выражением *f(n)* от одной переменной $n \in Z$, а заданное множество промежутком с концами *a* и *b* *(a<b)*. Тогда, решая относительно n одно из четырех неравенств *a(<,≤)f(n)(<≤)b,* в зависимости от того, входят или не входят концы в заданный промежуток, находим, какие числа f(n) содержатся в этом промежутке [3]. Данный метод отбора корней из заданного множества называется алгебраическим. Разберем алгебраический метод на примере 2.

Пример 2:

а). Решите уравнение $4(sin\,x\,)^2 - 12sinx + 5 = 0$

б). Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку: [-π; 2π].

Решение:

а). Обозначим $sinx = t$, где $-1 \le t \le 1$, тогда $4t^2 - 12t + 5 = 0$. Решаем данное квадратное уравнение: $D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64$.

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-12) + \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{12 + 8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

t_1 – не является корнем уравнения, так как не принадлежит промежутку [-1; 1].

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-12) - \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{12 - 8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Обратная замена: $sinx = \frac{1}{2}$

$x_1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, *где n – целое число*

$x_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, *где k – целое число.*

б). Найдем корни уравнения, принадлежащие промежутку [-π; 2π], алгебраическим методом.

Решаем неравенство $-\pi \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n \le 2\pi$

$$-\pi - \frac{\pi}{6} \le 2\pi n \le 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{7\pi}{6} \le 2\pi n \le \frac{11\pi}{6}$$

Разделим это неравенство на $\frac{\pi}{2}$, получим:

$$-\frac{7}{12} \leq n \leq \frac{11}{12}$$

Так как n является целым числом, то n=0. Отсюда находим $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{6}$.

Аналогично решаем следующее неравенство $-\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \ \leq 2\pi$

$$-\pi - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi k \ \leq 2\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$-\frac{11\pi}{6} \leq 2\pi k \ \leq \frac{7\pi}{6}$$

Разделим это неравенство на $\frac{\pi}{2}$, получим:

$$-\frac{11}{12} \leq k \ \leq \frac{7}{12}$$

Так как k является целым числом, то k=0. Отсюда находим $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а). $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, *где n – целое число.* $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ *, где k – целое число.* б). $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Зачастую формула корней тригонометрического уравнения является линейной возрастающей функцией f(n) от одной переменной n ∈ Z, а промежуток представляет из себя отрезок [a;b], где a<b. Тогда если 1). f(0)$\leq a$, то находим поочередно f(1), f(2), … и определяем, какие из чисел f(i) (i $\in N \cup 0$) удовлетворяет неравенству a $\leq f(i) \leq b$. Если же 2). a $< f(0) \leq b$, то находим поочередно f(1), f(2), … , f(-1), f(-2), … и определяем, какие из чисел f(i) (i ∈ Z) удовлетворяют неравенству a $\leq f(i) \leq b$. Наконец, если 3). b<f(0), то во множестве чисел f(-1), f(-2), … находим такие числа f(-i) (i ∈ N), что a $\leq f(-i) \leq b$ [3]. Данный метод

отбора корней из заданного множества называется функциональный. Рассмотрим данный метод на примере 3.

Пример 3:

а). Решите уравнение $7\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2cos2x=0$

б). Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие отрезку [5π; 6π] [4].

Решение:

а). Воспользуемся формулой приведения и формулой двойного угла $cos2x=1-2(sinx)^2$ для преобразования левой части данного уравнения:

$$-7sinx-2(1-2(sinx)^2)=0$$

$$-7sinx+4(sinx)^2-2=0$$

$$4(sinx)^2-7sinx-2=0$$

Обозначим $sinx=t$, где $-1\le t\le 1$, тогда $4t^2-7t-2=0$

Решаем данное квадратное уравнение: $D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 4\cdot(-2)=49+32=81$.

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-7)+\sqrt{81}}{2\cdot 4}=\frac{7+9}{8}=\frac{16}{8}=2$$

t_1 – не является корнем уравнения, так как не принадлежит промежутку

[-1; 1].

$$t_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-7)-\sqrt{81}}{2\cdot 4}=\frac{7-9}{8}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

Обратная замена: $sinx=-\frac{1}{4}$

$x_1=\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n=-arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi n$, *где n – целое число*

$x_2=\pi-(-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right))+2\pi k=\pi+arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi k$, *где k – целое число.*

Полученные корни уравнения можно представить следующим образом: $x = (-1)^{m+1} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + \pi m,$ где $m \in Z$.

б). Найдем все корни данного уравнения, принадлежащие отрезку [5π; 6π], функциональным методом.

Запишем множество $x = (-1)^{m+1} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + \pi m,$ где $m \in Z$ в виде двух множеств: $x_1 = -arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi n$ *, где n – целое число.* $x_2 = \pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi k$ *, где k – целое число.*

Функция x_1 является линейно возрастающей функцией от n и при n=0 принимает отрицательное значение $-arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$. Поэтому все значения x_1 при n = 0; -1; -2 … будут меньше 5π и в заданный промежуток не попадают.

Находим значение x_1 при n=1. Получаем число $2\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$. $2\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right) <$ 5π. То есть значение x_1 при n=1 не входит в заданный промежуток.

Находим значение x_1 при n=2. Получаем число $4\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$. $4\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right) <$ 5π. То есть значение x_1 при n=2 не входит в заданный промежуток.

Находим значение x_1 при n=3. Получаем число $6\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$.

$5\pi < 6\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right) < 6\pi.$ То есть $6\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$ попадает в заданный промежуток.

Далее убеждаемся, что значение x_1 при n=4 больше 6π. Получаем число $8\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right) > 6\pi$. То есть значение x_1 при n=4 не входит в заданный промежуток.

Единственное значение при $x_1 = 6\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$ попадает в заданный промежуток.

Аналогично рассуждая, получаем, что функция x_2 является линейно возрастающей функцией от k и при k=0 принимает положительное значение $\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$, меньшее 5π. Поэтому все значения x_2 при k = 0; -1; -2 … будут меньше 5π и в заданный промежуток не попадают.

Находим значение x_2 при k=1. Получаем число $3\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$. $3\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right) < 5\pi$. То есть значение x_2 при k=1 не входит в заданный промежуток.

Находим значение x_2 при k=2. Получаем число $5\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$. $5\pi < 5\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right) < 6\pi$. То есть $5\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$ попадает в заданный промежуток.

Теперь убеждаемся, что значение x_2 при k=3 больше 6π. Получаем число $7\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right) > 6\pi$. То есть значение x_2 при k=3 не входит в заданный промежуток.

Значит, единственное значение при $x_2 = 5\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$ попадает в заданный промежуток.

Ответ: а). $x = (-1)^{m+1} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + \pi m,$ где $m \in Z$ б). $x_1 = 6\pi - arcsin\left(\frac{1}{4}\right), x_2 = 5\pi + arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$.

Таким образом, отобрать корни в тригонометрическом уравнении из заданного множества можно, как минимум, тремя методами: геометрически, алгебраически, функционально. Для конкретного множества можно подобрать более рациональный способ. Эти методы можно использовать при решении задач единого государственного экзамена по профильной математике.

Использованные источники:

1. Словари и энциклопедии на Академике [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc3p/297118 (дата обращения: 24.07.2021).
2. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/problem?id=507595 (дата обращения: 24.07.2021).
3. Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развёрнутым ответом: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. –2-е изд., перераб. и доп., – Ростов-на-Дону: Легион, 2019. – 448 с. – (ЕГЭ).
4. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2020. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2020 года: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2019. – 416 с. – (ЕГЭ).